

GPS-järjestelmän teoreettisista perusteista

Tkt Tuomo Suntola

Relativistiset ilmiöt kellojen näyttämässä ja signaalien kulkuajoissa

1. Liikkeen ja gravitaation vaikutus (aikaan) kelloihin
2. GPS-järjestelmän koordinaattiaika
3. Signaalin kulku-aikaan liittyviä tekijöitä
4. Maapallo ja GPS-järjestelmä auringon gravitaatiokehyksessä
5. Päätelmiä

1. Liikkeen ja gravitaation vaikutus (aikaan) kelloihin

Suppean suhteellisuusteorian keskeisenä lähtökohtana on ollut havaintokoordinaatiston kuvaaminen siten, että valon nopeus ilmenee samana jokaiselle levossa tai tasaisessa liikkeessä olevalle havaitsijalle. Kellojen käyntitaajuuden osalta vaatimus toteutuu kun havaitsijaan nähden liikkeessä olevan kellon sovelletaan Lorentz muunnoksesta saatavaa aikadilaatiota, ts. liikkeessä olevan kellon käyntitaajuus (tai ajan kulku) havaitaan tekijällä $\sqrt{1-v^2/c^2}$ hidastuneena, missä v on kellon nopeus havaitsijaan nähden.

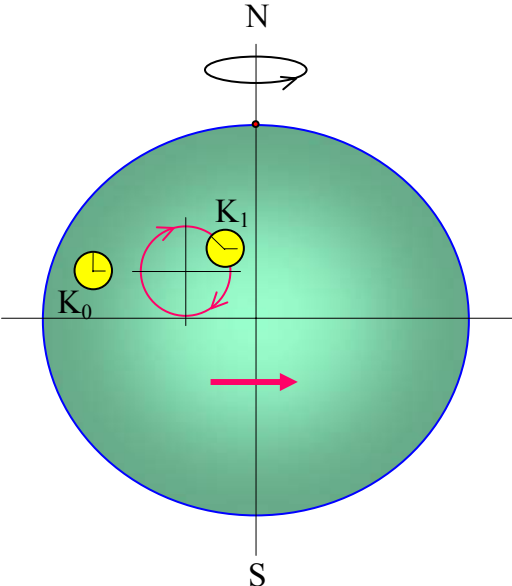
Aikadilaatio todennettiin ensimmäisen kerran laboratoriokokeissa 1930-luvun lopulla sähkökentässä kiihdytettyjen ionien emissioaallonpituudesta (Ives & Stilwell) ja sen jälkeen 1960-luvulla monissa Mössbauer-ilmiön perustuvissa sentrifugeilla tehdyissä kokeissa, kuva 1. Käytetyissä koejärjestelyissä lepotilaksi voitiin määritellä maapallon pinnan mukana pyörivä laboratorio, ilman että maapallon pyörimisestä johtuvaa nopeutta summattiin referenssivärahtelijän ja laboratoriossa liikkeessä olevien värahtelijöiden nopeuteen.

Kun vastaava koe vuonna 1971 tehtiin ensi kertaa vapaasti maapallon gravitaatiokehysesssä lentokoneissa liikkuvilla kelloilla [1,2], ei maan pinnalla olevaa havaitsijaa enää voitukaan pitää lepotilassa olevana, vaan liikkeen vaikutus kellojen jättämiin (aikadilaatioon) suhteutui maan pyörimisliikkeen suhteen levossa olevaan kellon, kuten kuvitteelliseen pohjois- tai etelänavalla olevaan kellon, kuva 2. Lepotilan tulkinta synnytti tieteellisen keskustelun suhteellisuusteorian perusteista; ”oikeaoppinen” koulukunta katsoi, että suppean suhteellisuusteorian aikadilaatio on havaitsemiseen liittyvä ilmiö havaitsijaan nähden liikkeessä olevasta objektista, mikä tarkoittaisi, että maapallon mukana pyörivää kuvan 2 kelloa K_R tulisi voida pitää levossa olevana vertailukellona [3,4].

Kokeen tulos oli kuitenkin yksiselitteinen, lentokoneessa länsisuuntaan maapallon ympäri lennätetty kello K_W edisti maan pinnalla olevaan kellon K_R nähden kun taas itäsuuntaan lennätetty kello K_E jäi jälkeen vertailukellosta K_R . Havainto antoi perustan maakeskeisen inertiaalikoordinaatiston määrittelylle (Earth Centered Inertial Frame, ECI-frame). ECI-kehyksessä tarkasteltuna maan pinnalla oleva vertailukello on liikkeessä maapallon pyörimisen, ja siten kellon sijaintipaikan leveyspiirin määräämällä nopeudella. Koska kellojen jättämät todettiin kelloissa itsessään olleilla laskureilla merkiksi koetulos myös, että kellojen jättämä ei ollut yhdistettävissä eri liiketilasta tapahtuvaan havaitsemiseen, vaan että se oli liiketilaan ko. liikejärjestelmässä sinänsä liittyvä ilmiö.

Kello suljetussa liikejärjestelmässä maan pinnalla

Earth-Centered, Earth-Fixed Frame (ECEF Frame):
Maakeskeinen koordinaatisto, joka on kiinnitetty maan pyörimiseen



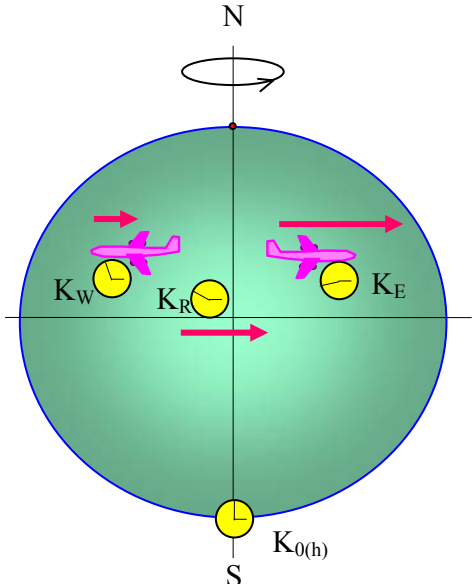
$$f_1 = f_0 \sqrt{1 - \frac{v_r^2}{c^2}} \approx f_0 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v_r^2}{c^2} \right)$$

Laboratoriokokeet
Ives–Stillwell 1939
Mössbauer-kokeet 1960-luvulla

Kuva 1. Suljetussa liikejärjestelmässä liikkuvan kellon aikadilaatio suhteutuu ko. liikejärjestelmän suhteen levossa olevaan kelloon.

Kello liikkeessä maapallon gravitaatiokehyksessä

Earth-Centered Inertial Frame (ECI Frame):
Maakeskeinen koordinaatisto, joka on riippumaton maan pyörimisestä



$$f_W \approx f_{0(h_W)} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{(v_\omega - v_W)^2}{c^2} \right)$$

$$f_E \approx f_{0(h_E)} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{(v_\omega + v_E)^2}{c^2} \right)$$

$$f_R \approx f_{0(h_R)} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v_\omega^2}{c^2} \right)$$

Cesium-kellot lentokoneissa
Hafele, Keating 1971
Mössbauer-kokeet 1960-luvulla

Kuva 2. Vapaasti maan gravitaatiokehyksessä liikkuvan kellon aikadilaatio suhteutuu maan pyörimiseen nähden levossa, samassa gravitaatiopotentiaalissa olevaan kelloon.

Edellä suoritetussa tarkastelussa käsiteltiin vain liikkeen vaikutusta kellon käyntiin. Yleisen suhteellisuusteorian, tai ehkä oikeammin ekvivalenssiperiaatteen, mukaan myös kellon gravitaatiotila vaikuttaa sen käyntinopeuteen, kuten myös Mössbauer-ilmiöön perustuvissa kokeissa 1960-luvulla ja yhtäpitävästi Hafelen ja Keatingin lentokoneissa lennätetyillä Cesiumkelloilla voitiin todentaa.

ECI-kehyksessä määriteltyjen liike- ja gravitaatiotilojen (gravitaatiopotentiaalin) yhteisvaikutus kellon taajuuteen voidaan ilmaista kuvan 3 lausekkeella

$$f_{0(h_x, v_x)} \approx f_{0(\infty, 0)} \left(1 - \frac{GM}{r_x c^2} \right) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v_x^2}{c^2} \right) \approx f_{0(\infty, 0)} \left[1 - \frac{GM}{r_x c^2} - \frac{1}{2} \frac{v_x^2}{c^2} \right] \quad (1)$$

missä vertailukellona on maapalloon nähden kaukana levossa oleva kello, jonka taajuus on $f_{0(\infty, 0)}$, kuva 3.

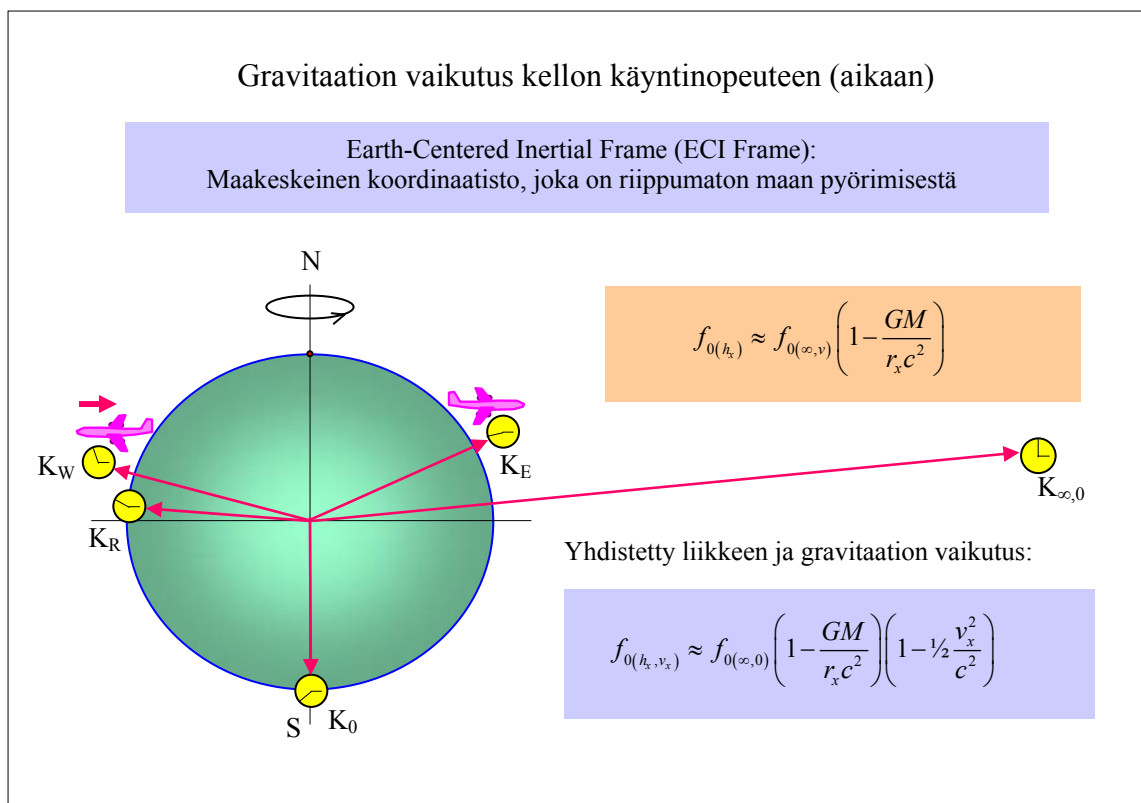
Yhtälöä (1) voidaan käyttää yleisenä lausekkeena paikallisessa liike- ja gravitaatiojärjestelmässä havaittavalle atomaarisen värähtelijän taajuudelle. Yleisen suhteellisuusteorian formalismissa yhtälö (1) saa muodon

$$f_{(r, \beta)} = f_{0(\infty, 0)} \sqrt{1 - \frac{2GM}{r_x c^2} - \frac{v_x^2}{c^2}} \approx f_{0(\infty, 0)} \left[1 - \frac{GM}{r_x c^2} - \frac{1}{2} \frac{v_x^2}{c^2} \right] \quad (2)$$

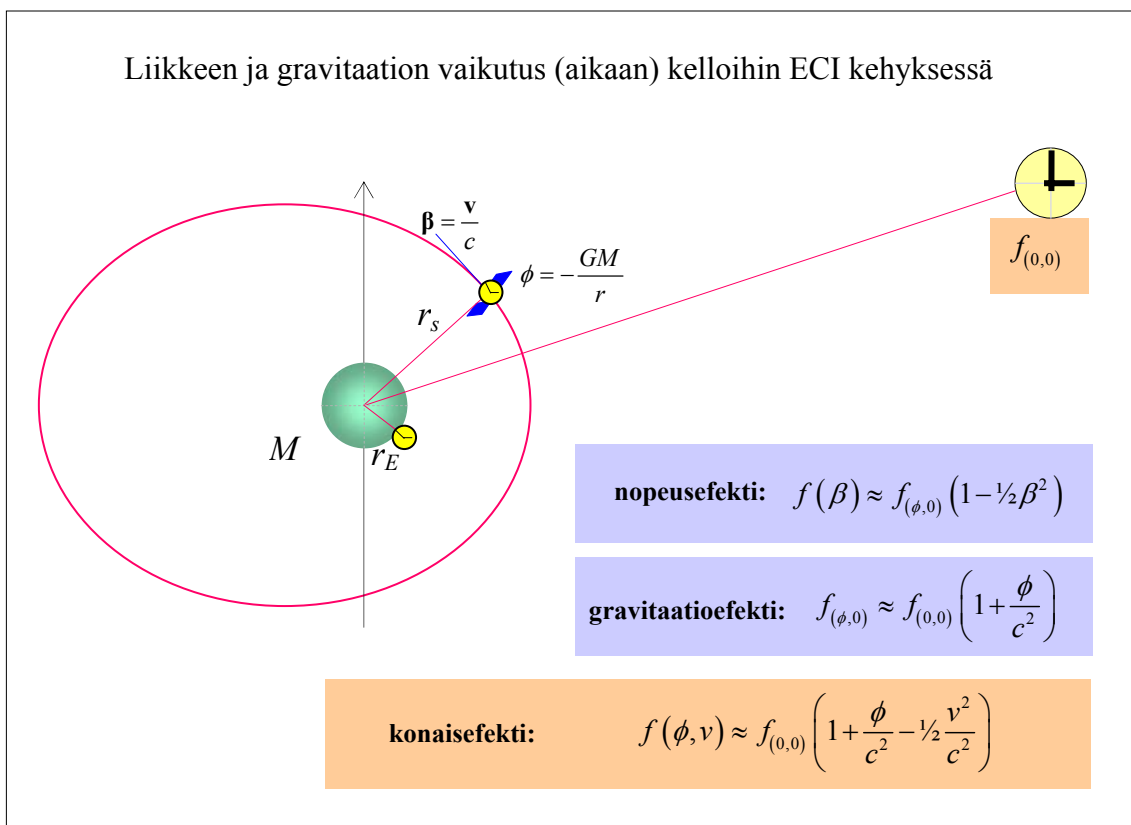
tai gravitaatiopotentiaalin $\phi = -\frac{GM}{r}$ avulla ilmaistuna muodossa

$$f_{(r, \beta)} = f_{0(\infty, 0)} \sqrt{1 + 2 \frac{\phi}{c^2} - \beta^2} \approx f_{0(\infty, 0)} \left[1 + \frac{\phi}{c^2} - \frac{1}{2} \beta^2 \right] \quad (3)$$

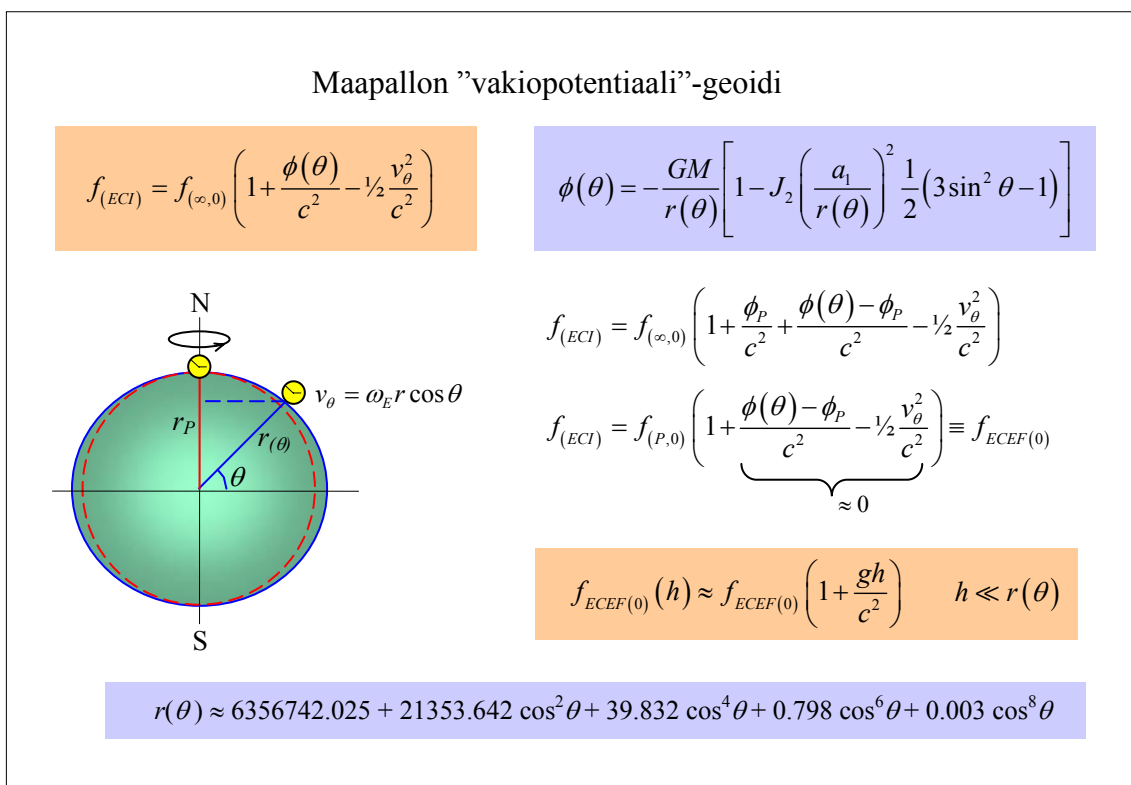
Yhtälöitä (1-3) voidaan soveltaa sellaisenaan satelliittien kellojen taajuuden (proper frequency) tarkasteluun ECI-kehyksessä, kuva 4. Sovellettaessa yhtälöitä maa-asemien kelloihin, on lisäksi huomioitava maan litistyneisyydestä johtuva leveysasteriippuvuus gravitaatiopotentiaaliin.



Kuva 3. Massakeskuksen läheisyys hidastaa kellon taajuutta suhteessa kaukana massakeskusta olevaan vertailukellon taajuuteen.



Kuva 4. Kuvassa 3 esitettyä liikkeen ja gravitaation yhteisvaikutusta kellotaajuuteen voidaan soveltaa sekä maan pinnalla, että satelliiteissa. Satelliitin rataliikkeen keskeiskiihtyvyydellä ei ole vaikutusta kellojen taajuuteen.



Kuva 5. Navoilta päiväntasaajalle siirryttäessä maapallon litistyneisyydestä johtuva säteen kasvu pienentää kellojen gravitaatiohidastumaa saman verran kuin maapallon pyörimisestä johtuva kehänopeuden kasvu lisää liikehidastumaa (aikadilaatiota).

Maapallon litistyneisyys aiheuttaa gravitaatiopotentiaaliin kvadropolimomentin (quadrupole moment), jonka vaikutuksesta gravitaatiopotentiaali on leveyspiirin θ funktio

$$\phi_E(\theta) = -\frac{GM}{r(\theta)} \left\{ 1 - J_2 \left[\frac{r(0)}{r(\theta)} \right]^2 \frac{1}{2} (3 \sin^2 \theta - 1) \right\} \quad (4)$$

missä $J_2 = 1.0826300 \cdot 10^{-3}$ (= quadrupole moment coefficient), $r(0)$ on maapallon säde ekvaattorilla. Leveyspiirillä θ säteelle $r(\theta)$ käytetään likiarvoa

$$r(\theta) = 6356742.025 + 21353.642 \cos^2 \theta + 39.832 \cos^4 \theta + 0.798 \cos^6 \theta + 0.003 \cos^8 \theta \quad (5)$$

missä ensimmäinen termi $r(90^\circ) = 6356742.025$ on maapallon säde navoilla.

Yhtälöä (4) soveltaen saa maan pinnalla, pintaan nähden levossa olevan kellon taajuuden lauseke muodon

$$f_{(ECI)} \approx f_{(\infty,0)} \left(1 + \frac{\phi_E(\theta)}{c^2} - \frac{1}{2} \frac{v_\theta^2}{c^2} \right) \quad (6)$$

missä $v_\theta = \omega_E r(\theta) \cos \theta$ on maapallon pyörimisestä johtuva nopeus ja $\phi_E(\theta)$ on yhtälön (4) mukainen gravitaatiopotentiaali. Maapallon litistyneisyyden aiheuttama lisäys gravitaatiopotentiaalitermiin $\phi_E(\theta)/c^2$ maapallon säteen kasvaessa päiväntasaajaa lähestyttäessä on jokseenkin yhtä suuri kuin vastaava pyörimisnopeuden aiheuttama nopeustermi $\frac{1}{2}(v_\theta/c)^2$ pieneneminen, joten yhtälön (6) kahden viimeisen termin summa on vakio.

Maapallon ”vakiopotentiaali”-geoidi määritelläänkin yhtälöstä

$$\frac{\Phi}{c^2} = \frac{\phi_E(\theta)}{c^2} - \frac{1}{2} \frac{v_\theta^2}{c^2} \equiv \text{vakio} \quad (7)$$

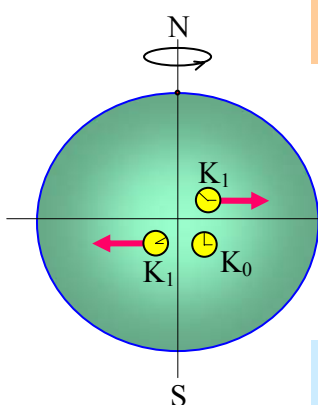
josta voidaan ratkaista ”vakiopotentiaali”-geoidin säde [vrt. yhtälö (5)] leveysasteiden funktiona, kuva 5. On huomattava, että näin määriteltyyn vakiopotentiaaliin sisältyy maapallon pyörimisen antamasta liike-energiasta johtuva termi, joten vakiopotentiaali Φ ei muodostu pelkästään gravitaatiopotentiaalista. Määrittelystä johtuen atomikellon taajuus levossa merenpinnan korkeudella (= geoidin määräämän säteen etäisyydellä maapallon keskipisteestä) on vakio [5]. Kellojen tarkastelu vakiopotentiaali-geoidilla tarkoittaa ECEF-kehyyksen käyttöä, sillä liikereferenssinä on tällöin maapallon pinta pyörimisliikkeineen.

Kuvassa 6 on verrattu suppean suhteellisuusteorian tulkintaa ECEF ja ECI-kehyyksissä. ECEF-kehyyksessä tarkasteltuna aikadilaatiota sovelletaan suhteelliseen nopeuteen ja korjataan kehyyksen liikkeestä johtuvalla lisätermillä, jota nimitetään Sagnac-korjaukseksi [6-8] (johtuen sen matemaattisesta samankaltaisuudesta Sagnac-ilmiöön). ECI-kehyyksessä tarkasteltuna aikadilaatiota voidaan soveltaa suoraan kellon kokonaisnopeuteen $\mathbf{v}_{ECI} = \mathbf{v}_{r(\text{Earth})} + \mathbf{v}_{\omega(\theta)}$, jolloin mitään lisäkorjauksia ei tarvita. Kuvassa 6 nopeus $v_{r(\text{East})}$ tarkoittaa kellon maanpintaan nähden suhteellisen nopeuden itään suuntautuvaa komponenttia ja $v_{r(\perp)}$ sitä vastaan kohtisuoraa nopeuskomponenttia.

Kun kelloa kuljetaan itä-länsisuunnassa maapallon ympäri nopeudella, joka on pieni maan paikalliseen pyörimisnopeuteen nähden, $v_{r(\text{East})} = v_{ECI} - v_{\omega(\theta)} = dv_{\omega(\theta)}$, voidaan kumuloitua aikadilaatio ECI-kehyyksessä laskea taajuusdifferenssin aikaintegraalista kuljetusaikana. Koska taajuusdifferenssi on suoraan verrannollinen nopeusdifferenssiin, $df = v dv$, ja kuljetusaika kääntäen verrannollinen nopeusdifferenssiin, supistuu kuljetusnopeus (nopeusdifferenssi) kumuloidun aikadilaation lausekkeesta, joka näin on kuljetusnopeudesta riippumaton. Kuvassa 7 on esitetty aikadilaatio, joka syntyy kun kelloa kuljetetaan maapallon ympäri päiväntasaajaa myöten itä ja länsisuuntaan.

ECEF kehyyksessä tarkasteltuna näin saatua kellon jättämää/edistymää nimitetään Sagnac-siirtymäksi, jota kirjallisuudessa käytetään määritelmän tavoin tehtävänä korjauksena [8].

Siirrettävä kello ECI- ja ECEF kehyksissä



aika-
dilaatio
 K_0 aika-
dilaatio
 K_1

ECI: $f_{(h,v_R)} \approx f_{MC} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{v_{\omega(\theta)}^2}{c^2} - \frac{1}{2} \frac{v_{ECI}^2}{c^2} \right]$

$= f_{MC} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{v_{\omega(\theta)}^2}{c^2} - \frac{1}{2} \frac{(v_{r(East)} + v_{\omega(\theta)})^2 + v_{r(\perp)}^2}{c^2} \right]$

$= f_{MC} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{v_r^2}{c^2} - \frac{v_{r(East)} v_{\omega(\theta)}}{c^2} \right]$

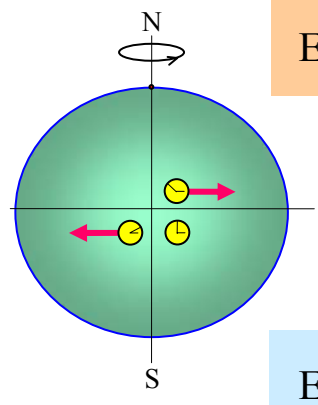
ECEF: $f_{(h,v_R)} = f_{MC} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{v_r^2}{c^2} - \frac{v_{r(East)} v_{\omega(\theta)}}{c^2} \right]$

aika-
dilaatio ”Sagnac”
-siirtymä

Kuva 6. Maapallon gravitaatiokehyksessä, määrättyssä gravitaatiopotentiaalissa, aikadilaatio määrittyy nopeudesta maapallon pyörimisestä vapaaseen lepotilaan nähden (ECI-kehys). Jos aikadilaatio lasketaan suhteellisesta maan pintaan nähden, joudutaan tulosta korjaamaan ”Sagnac”-siirtymällä.

Aikadilaatio vai Sagnac ilmiö ?

Kelloa kuljetetaan matka $L = 2\pi r$ nopeudella $v \ll v_{\omega(\theta)}$
 Kellon näyttämä: $N_v = f(v) \cdot T_v = f \cdot \frac{L}{v}$



ECI: $f_{ECI[h,v(\omega)]} \approx f_{ECI[h,0]} \left(1 - \frac{v_{\omega(\theta)}^2}{2c^2} \right)$

$\frac{N_v - N_0}{N_0} = \frac{\Delta f}{f_0} T = \frac{f_0 d(\frac{1}{2}v_{eq}^2)}{c^2 f_0} \cdot \frac{L}{dv_{eq}} = \frac{v_{eq} (\pm dv_{eq}) L}{c^2 dv_{eq}}$

$= \pm \frac{v_{eq} \cdot 2\pi r_{eq}}{c^2} = \pm 207.4 \text{ [ns]}$

ECEF: $f_{ECEF(h,v_R)} = f_{ECEF(h,0)} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v_r^2}{c^2} - \frac{v_{r(East)} v_{\omega(\theta)}}{c^2} \right)$

$\frac{N_0 - N_v}{N_0} = \frac{\Delta f}{f_0} T = \frac{(\pm dv) \cdot v_{eq}}{c^2} \cdot \frac{L}{dv} = \pm \frac{\omega r_{eq} 2\pi r_{eq}}{c^2} = \pm \frac{2\omega A_{eq}}{c^2} = \pm 207.4 \text{ [ns]}$

”Aikadilaatio”-
kertymä

”Sagnac”-
siirtymä

Kuva 7. Maapallon pyörimisnopeuteen nähden pienellä nopeudella siirrettävän kellon kumuloitua aikadilaatio on ko. siirtonopeudesta riippumaton. ECEF-kehyksessä tarkasteltuna ko. jättämää nimitetään Sagnac-ilmiöksi.

2. GPS-järjestelmän koordinaattiaika

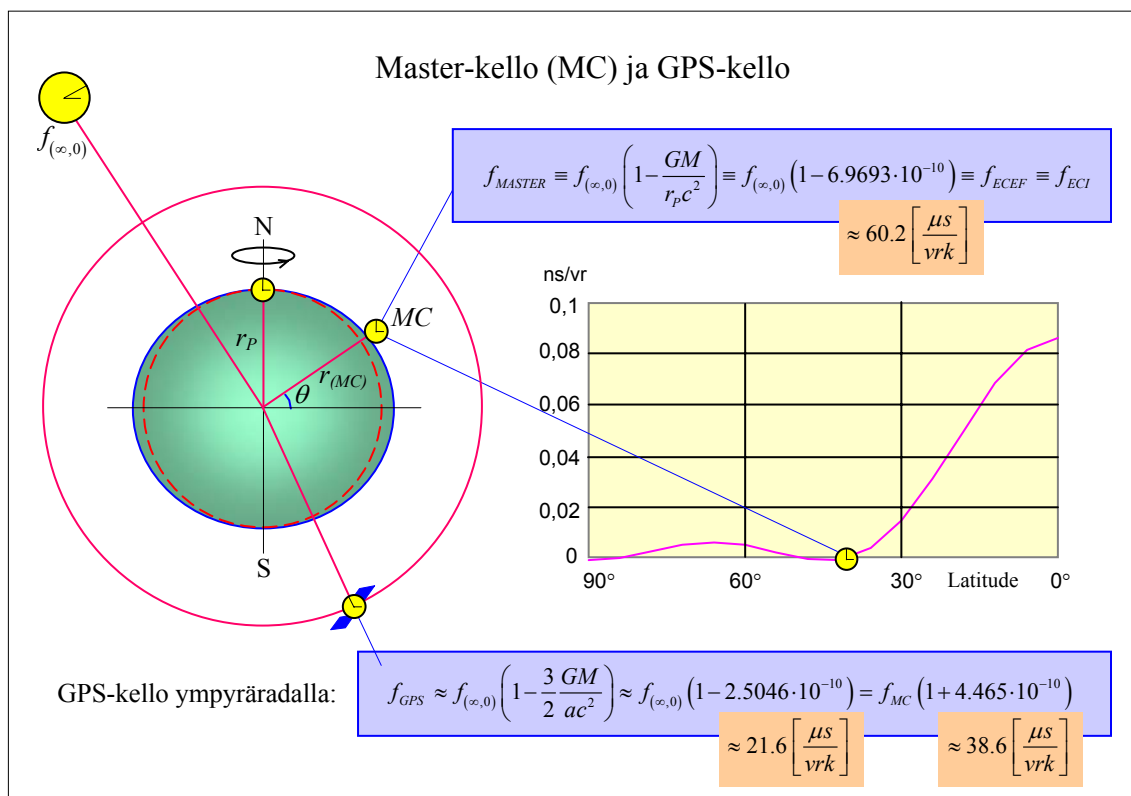
Yhtälön (5) mukaista maapallon sädettä käyttäen saadaan geoidilla kuvassa 8 esitetty kello-taajuuden riippuvuus leveyspiiristä. Kuvassa on myös esitetty geoidilla olevan referenssikellon (MC) taajuuden ero GPS-radalla käyvään kelloon sekä kuvitteelliseen äärettömän kaukana levossa olevaan referenssikelloon. GPS-radalla toteutuva kellotaajuuden ero Master-kellon taajuuteen nähden on $\Delta f/f = 4.465 \cdot 10^{-10}$. Käytännössä radalleen lähetettävien GPS-satelliittien kellot viritetään ennen laukaisua käymään kertoimella $4.465 \cdot 10^{-10}$ hitaammin kuin Master-kello, jolloin ne radalleen päästyään käyvät samalla taajuudella kuin Master-kello maassa.

On huomattava, että GPS-kellojen koordinaattiaika on määritelty ECI-kehyksessä vaikka referenssinä (Master Clock) käytetään pyörivän maapallon pinnalla ECEF-kehyksessä (Earth Centered Earth Fixed) määriteltyä standardiaikaa. Tämä on jossain määrin hämmentävää — syy lienee lähinnä historiallinen, sillä 1970-luvulle asti maan pintaa pyörimisliikkeineen totuttiin pitämään referenssitilana suppean suhteellisuusteorian mukaiselle aikadilaatiolle. GPS-järjestelmän koordinaattiaika vastaa ECI-kehyksessä levossa maapallon pohjois- ja etelänavan gravitaatiopotentiaalissa olevan kellon osoittamana aikana.

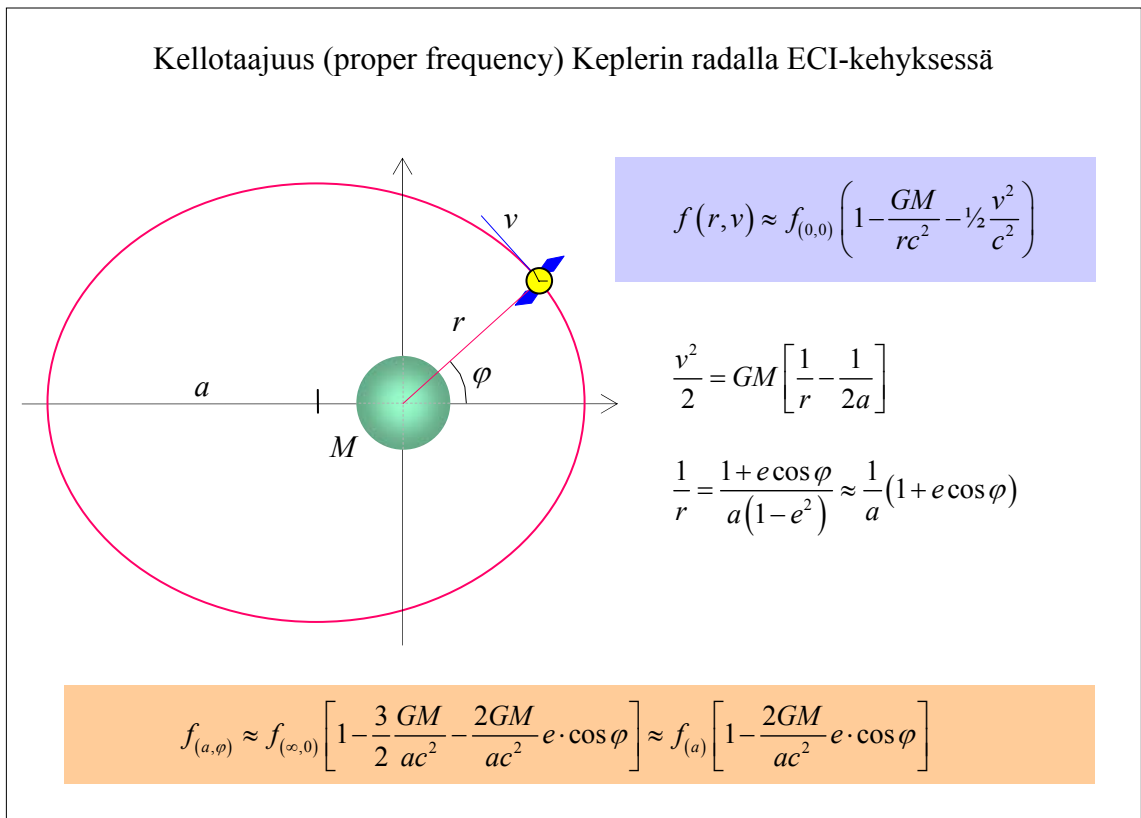
Kellon käyntitaajuus satelliitin kiertoradalla

GPS-satelliitin rata voidaan kuvata Keplerin ratana, jolloin kellotaajuuden gravitaatio- ja liiketermit voidaan yhdistää. Satelliittien rata pyritään saamaan mahdollisimman tarkoin ympyräksi, sillä eksentrisyys aiheuttaa kellotaajuuteen jaksollisen häiriön kuvissa 9 ja 10 esitettyjen yhtälöiden mukaisesti.

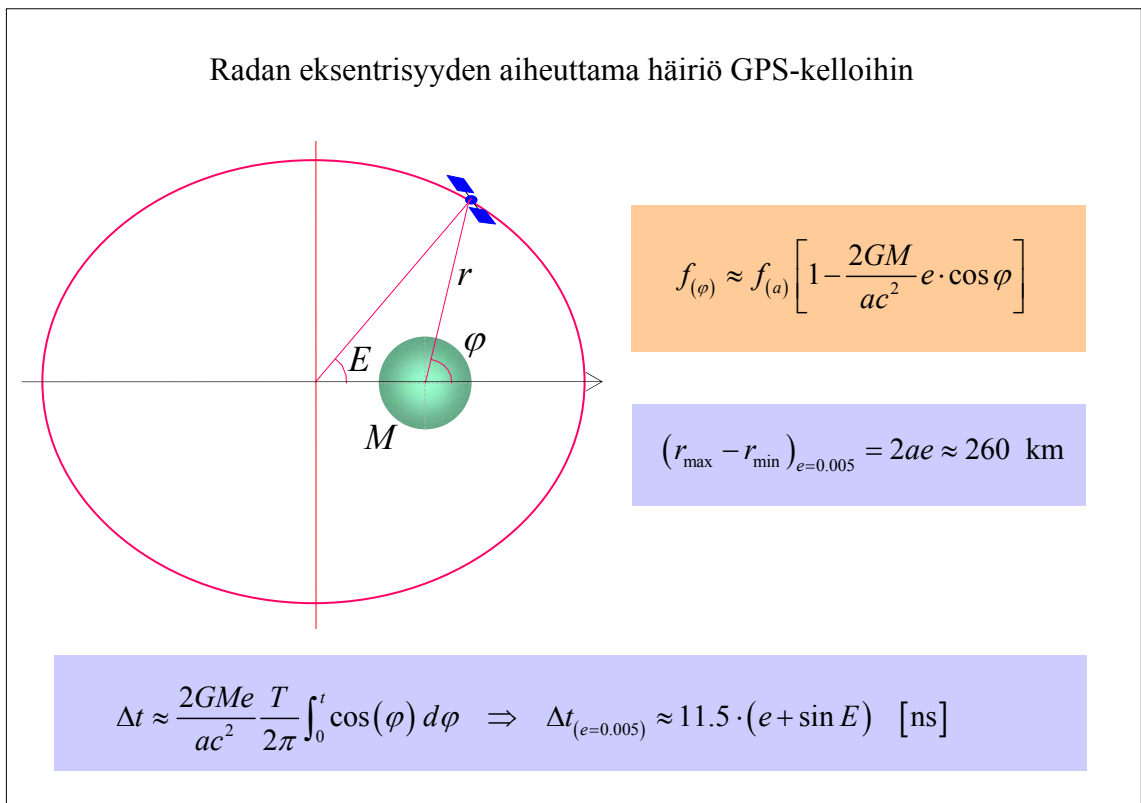
Kuten kuvassa 10 on havainnollistettu, aiheutuu kellon näyttämään keskimääräisestä noin 0.5%:n eksentrisyydestä amplitudiltaan 11.5 ns:n suuruinen sinimuotoinen häiriö, jonka jakso on satelliitin kiertoaika, 11 tuntia 58 minuuttia. Kuva 11 esittää tyypillistä GPS-kellodataa, jossa puolen vuorokauden jaksollisuus on selvästi havaittavissa.



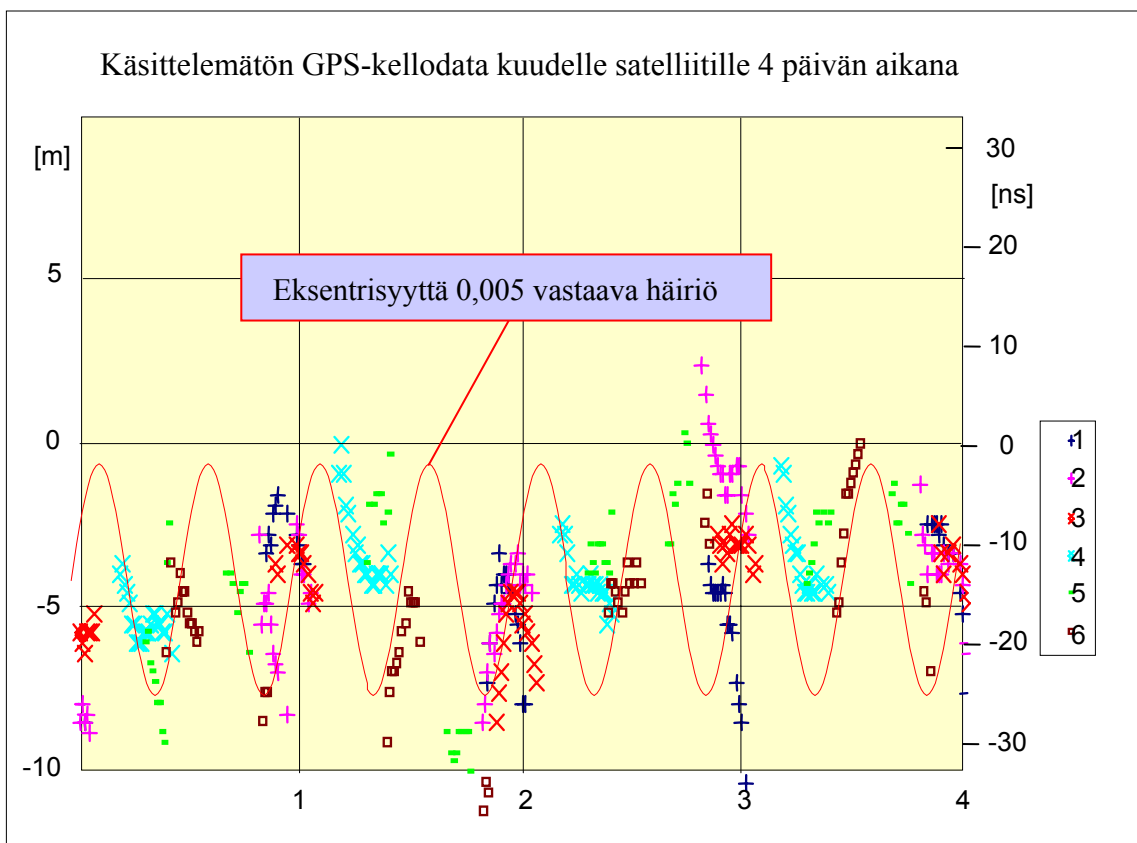
Kuva 8. Standardiaika on kiinnitetty maan ”vakiopotentiaali”-geoidilla (ECEF-kehyksessä) olevan kellon taajuuteen. GPS-järjestelmä koordinaattiaika määritellään kuitenkin ECI-kehyksessä, jonka kuvitteellinen vertailukello on levossa kaukana maasta (vrt. kuva 4).



Kuva 9. Keplerin radalla olevan satelliitin kellotaajuuden gravitaatio- ja liiketermit voidaan yhdistää Keplerin energiaintegraalin avulla.



Kuva 10. Radan elliptisyys aiheuttaa satelliitin kelloon eksentrisyyteen e verrannollisen jaksollisen häiriön.



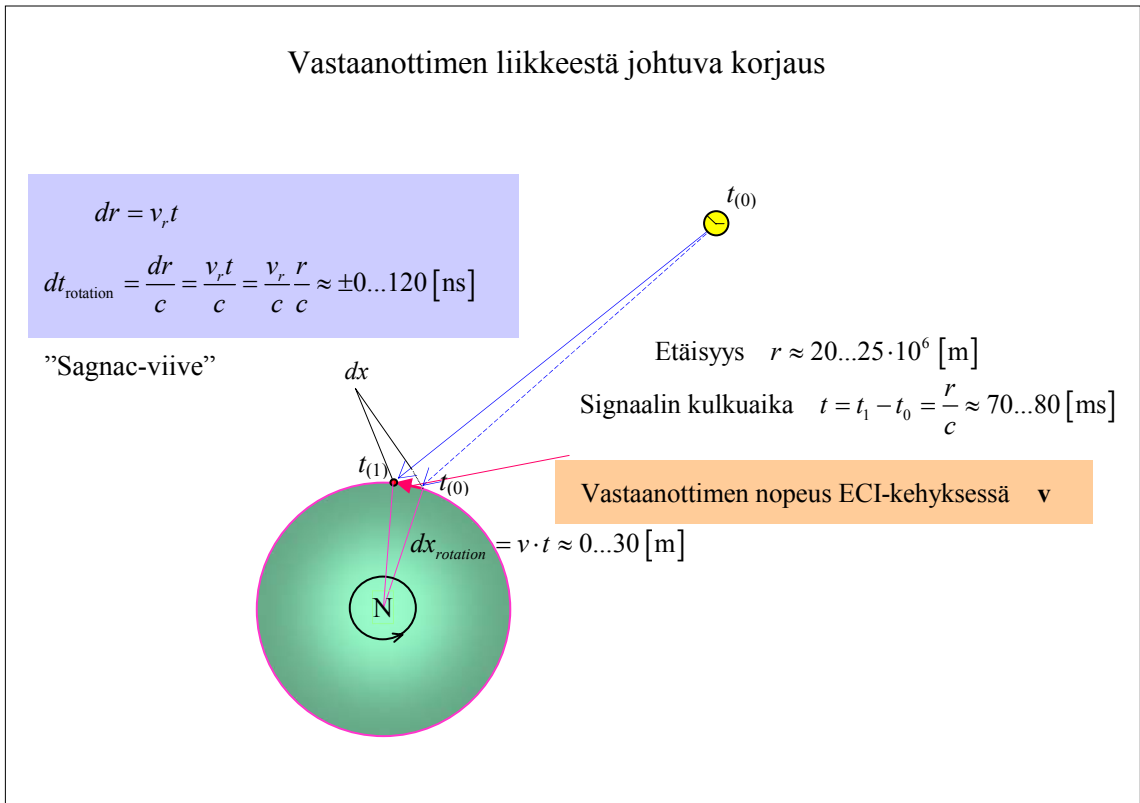
Kuva 11. Käsittelemätön GPS-kellodata (=poikkeama Master-kellon näyttämästä) sisältää merkittävän jaksollisen häiriön satelliitin kiertojan (11 h 58 min) taajuudella. Jaksollisten häiriöiden mahdollinen eliminointi datasta on käyttäjän tehtävä.

3. Signaalin kulkuaikaan liittyviä tekijöitä

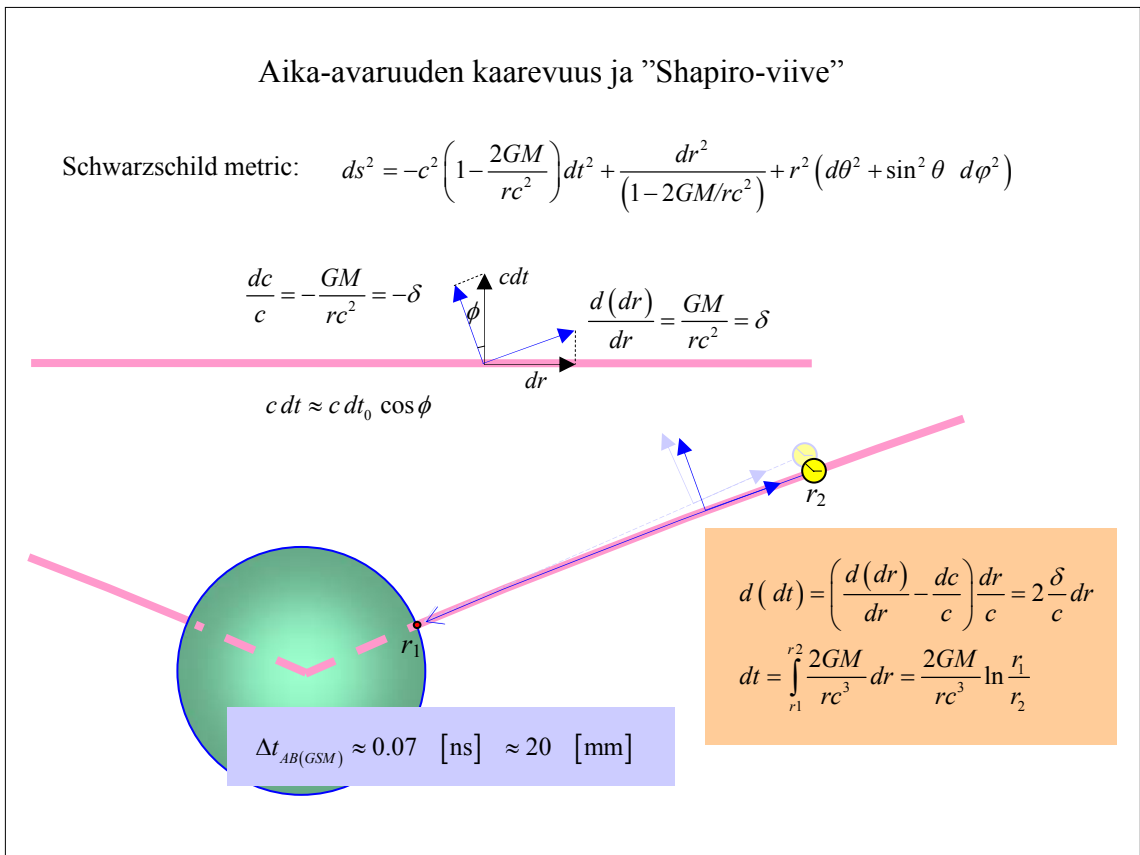
Paitsi kellojen käyntitaajuutta on myös signaalin etenemistä yksinkertaisinta tarkastella ECI-kehyksessä, johon myös valon nopeuden voidaan ajatella suhteutuvan. Signaalin ns. Sagnac-viive määrätään matkasta, jonka (maan pintaan nähden paikallaan oleva) vastaanotin etenee maapallon pyörimisestä johtuen signaalin kulkuaikana, kuva 12. Sagnac-nimitys periytyy tähänkin ilmiöön maapallon pyörimisliikkeestä, viiveen laskutapa on kuitenkin sama vastaanottimen mikä tahansa ECI-kehyksessä tapahtuvan liikkeen suhteen.

Yleisen suhteellisuusteorian mukainen aika-avaruuden kaareutumisesta johtuva signaalin kulkuajan piteneminen maan massan läheisyydessä tunnetaan Shapiro-viiveenä. Jos valon ”koordinaatinopeuden” vertailuarvona käytetään maan pinnalla määriteltyä valon nopeutta on oikeampaa puhua Shapiro-nopeutumasta. Shapiro-efekti voidaan johtaa Schwarzschildin metriikasta, kuva 12. GPS-signaaleille Shapiro-efekti on suuruudeltaan noin 0.07 ns, mikä vastaa noin 20 mm:n etäisyyttä signaalin kulkumatkassa, kuva 13.

Shapiro-efektin tarkempi analyysi herättää kysymyksen viiveen rakentumisesta signaalin kulkutien radiaalisen (massasta poispäin suuntautuvan) ja toisaalta kulkutien tangentialisen komponentin suhteen. Suhteellisuusteorian Shapiro-lausekkeessa viiveen kertyminen tangentialikomponentin suunnassa on oletettu samaksi kuin sen kertyminen radiaalisuunnassa, jolloin päädytään kuvan 14 lausekkeisiin. Valon koordinaatinopeus vaikuttaa kummassakin suunnassa samalla tavalla, mutta aika-avaruuden kaareutumisen aiheuttamasta viivaelementin dr pitenemästä johtuva viiveen komponentti kertyy periaatteessa vain radiaalikomponentin osalta, kuva 15. Jos tällainen korjaus huomioidaan, saa Shapiro-viiveen lauseke kuvassa 15 esitetyn muodon. Suuruudeltaan ko. korjaus GPS-signaalin Shapiro-viiveeseen on nolasta neljään millimetriä edellä todettuun noin 20 mm:n viiveeseen signaalitien vertikaalikulmasta riippuen.



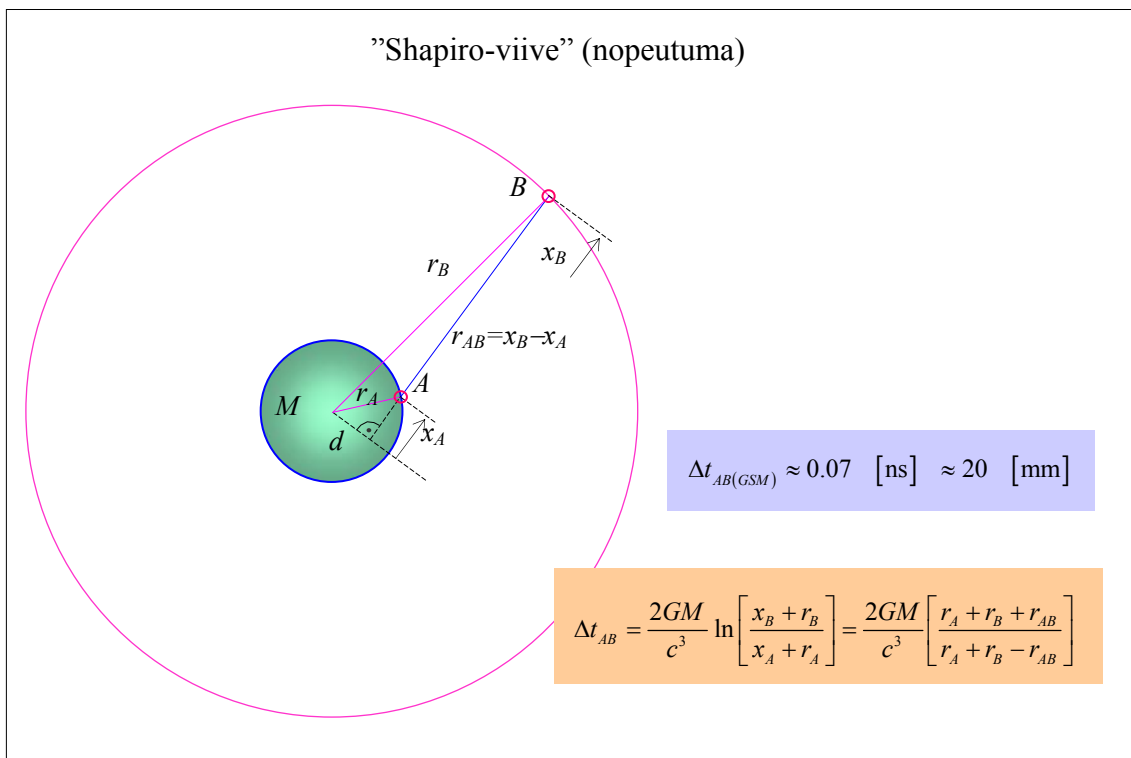
Kuva 12. Satelliitin etäisyyden ja signaalin kulkuajan määrittämisessä on huomioitava vastaanottimen liike signaalin kulkuajana satelliitista vastaanottimeen.



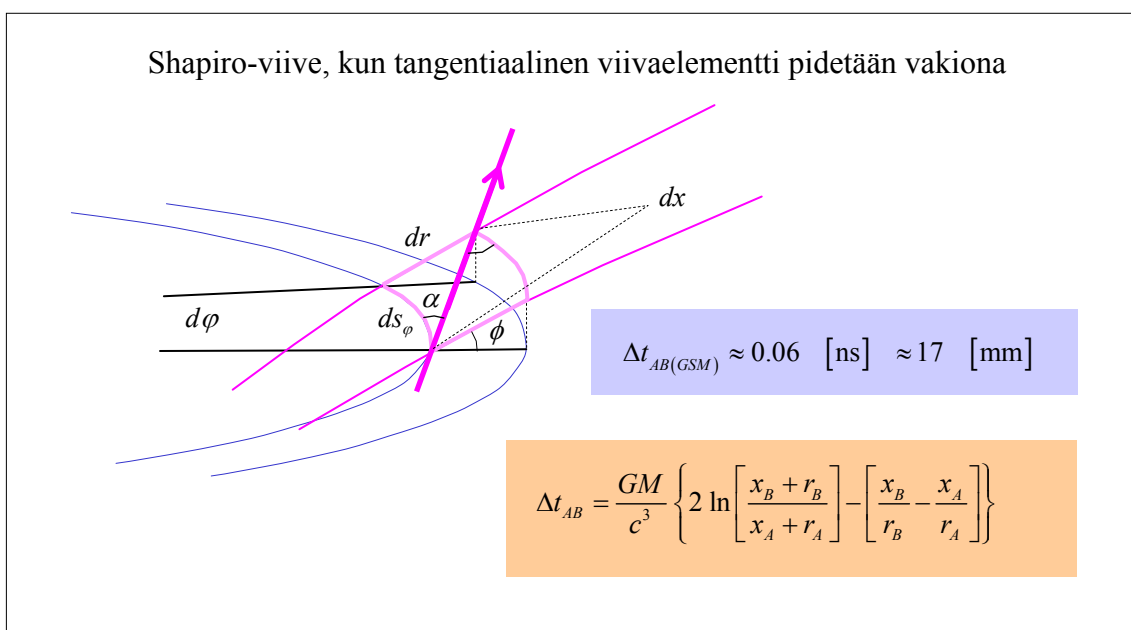
Kuva 13. Aika-avaruuden kaareutuminen massakeskuksen läheisyydessä hidastaa signaalin koordinaatinopeutta ja pidentää signaalin kulkutietä.

4. Maapallo ja GPS-järjestelmä auringon gravitaatiokehyksessä

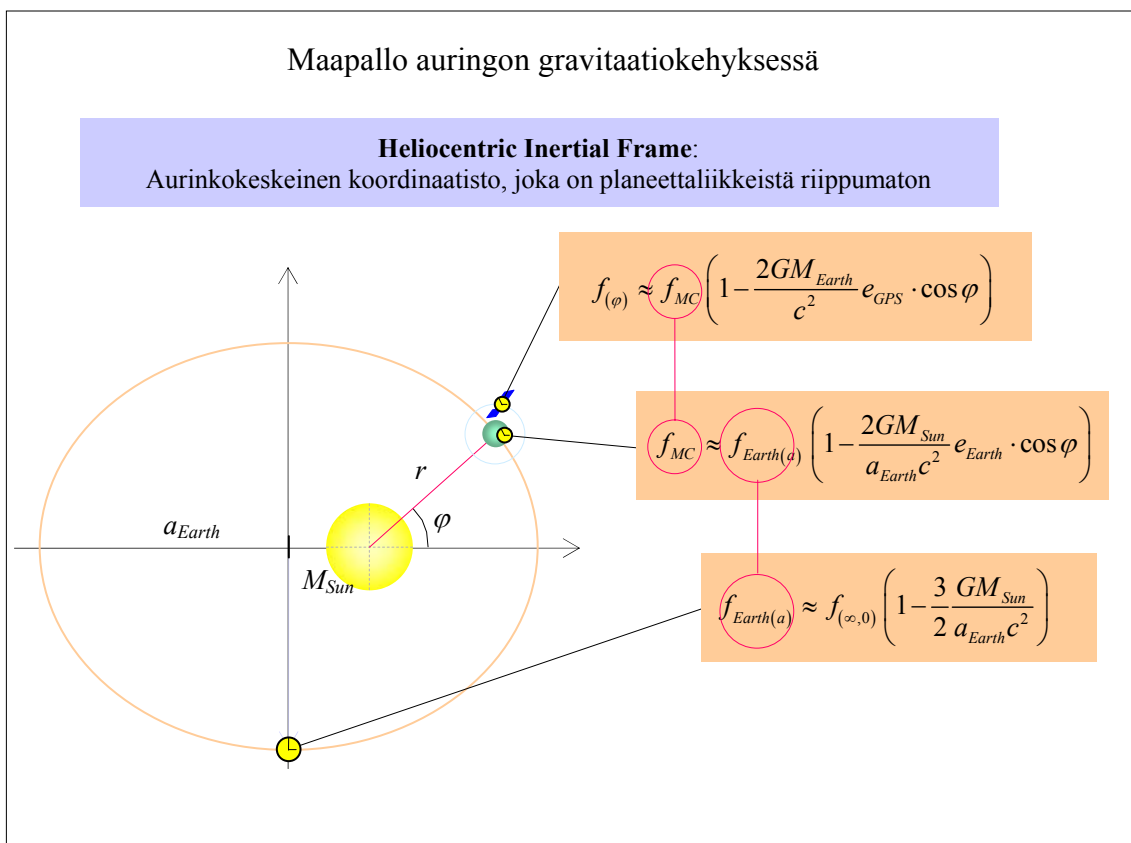
Kuten edellä esitetystä on käynyt ilmi vaikuttaa paikallinen gravitaatiopotentiaali ja nopeus paikallisessa gravitaatiojärjestelmässä atomikellon käyntitaajuuteen. Maapallo satelliitteineen liikkuu auringon gravitaatiojärjestelmässä radalla, jonka eksentrisyys on noin 0.0167. Tämä merkitsee, että auringon gravitaatiokehyksessä tarkasteltuna kaikkien järjestelmän kellojen käyntitaajuuteen tulee vuodenajasta riippuva tekijä — tammikuun alussa, jolloin maa on perihelipisteessään kellot käyvät hitaimmin ja heinäkuun alussa, kun maa on aphelissä, nopeimmin, kuvat 16 ja 17.



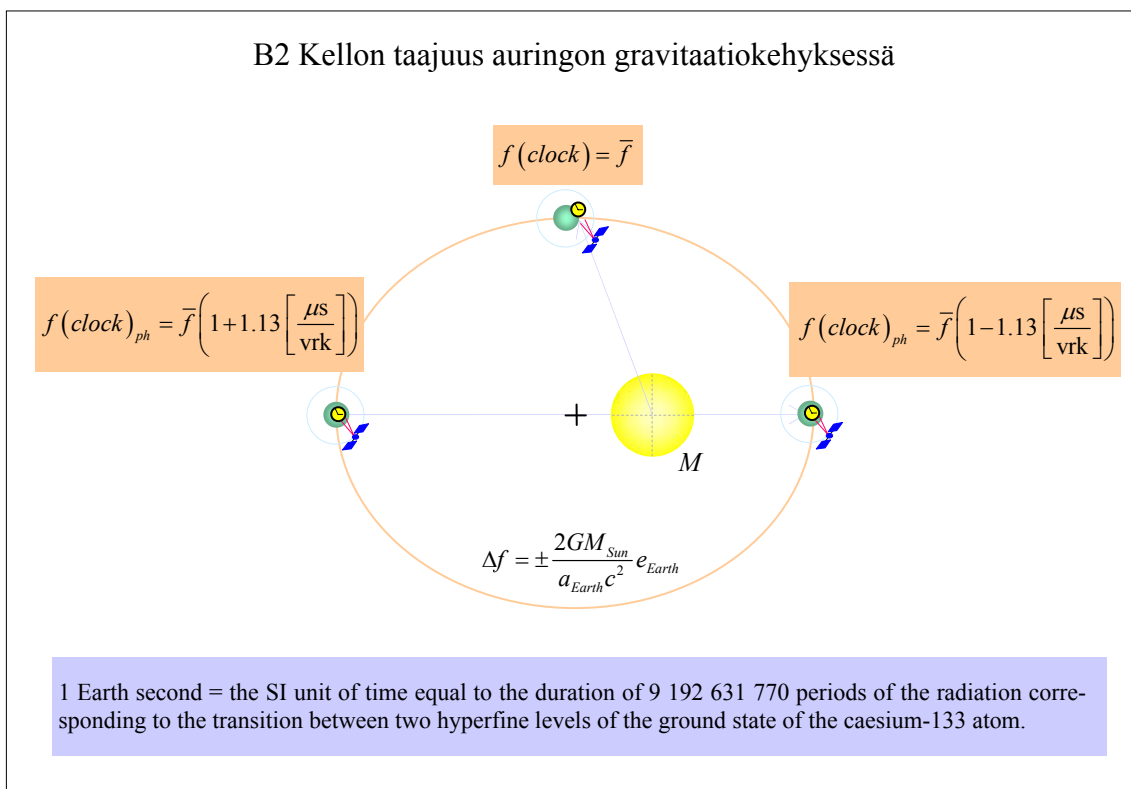
Kuva 14. GPS-satelliiteille aika-avaruuden kaareutumisesta johtuva Shapiro-korjaus on noin 0.07 ns.



Kuva 15. Aika-avaruuden geometrinen tarkastelu johtaa päätelmään, että Shapiro-viive on suurempi signaalin kulkutien radiaalikomponentille kuin tangentialikomponentille.



Kuva 16. Auringon gravitaatiokehyksessä tarkasteltuna on maapallon gravitaatiokehyksessä olevien kellojen taajuuksissa maan radan eksentrisyydestä johtuva jaksollinen häiriö. Häiriö välittyy sekä maan pinnan että satelliittien kelloihin.

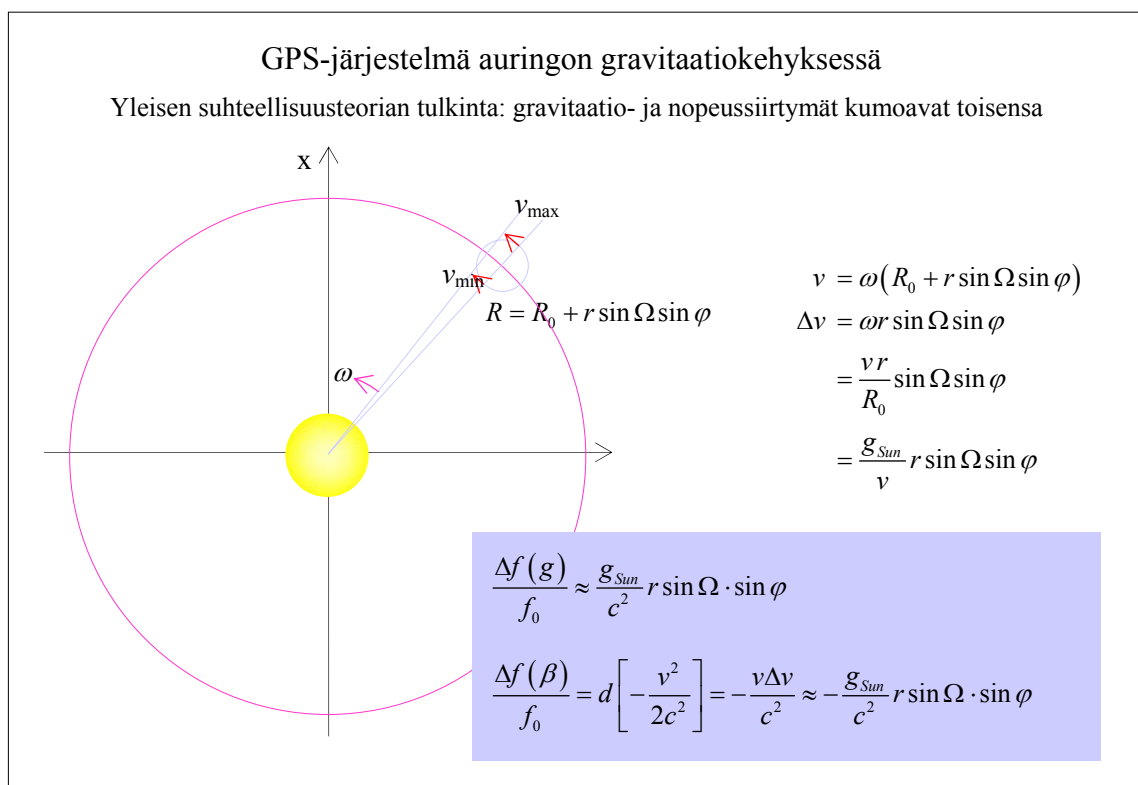


Kuva 17. Maan planeettaradan eksentrisyydestä johtuvan jaksollisen häiriön amplitudi maan standardiajassa on noin 1.13 $\mu\text{S}/\text{vrk}$.

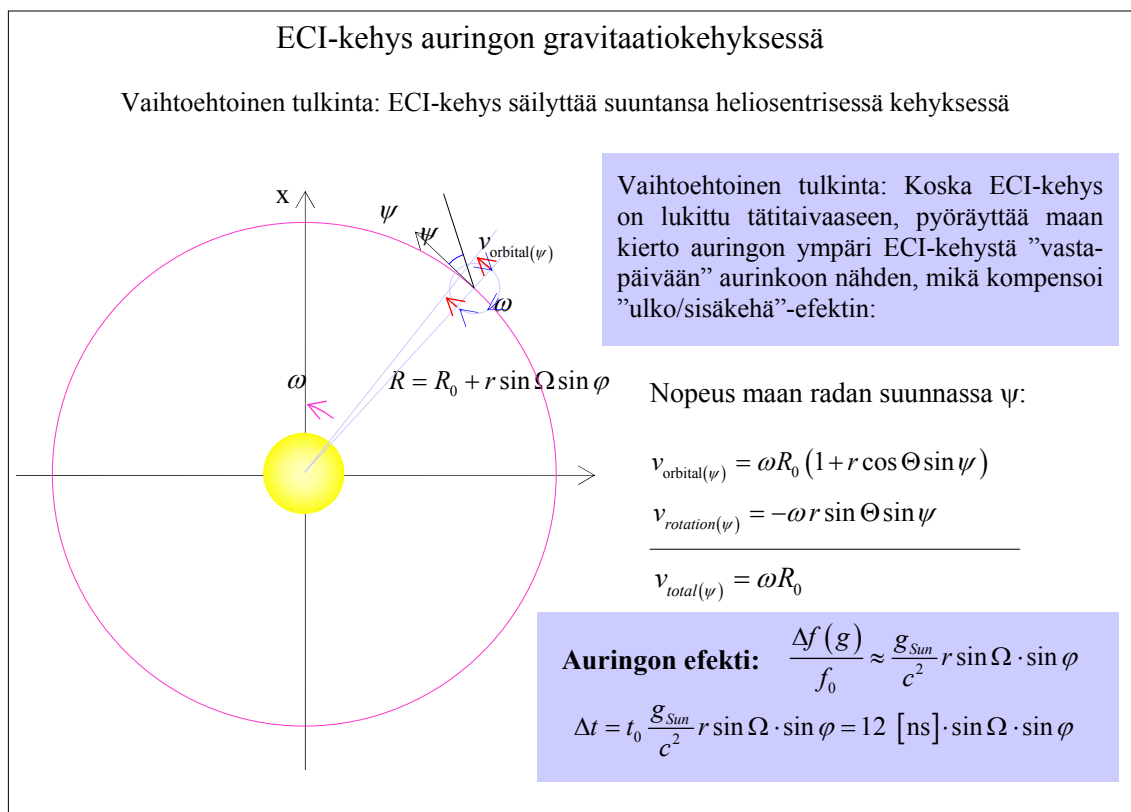
Kuvassa 16 on yhdistetty kellojen gravitaatio- liikekorjaukset auringon ja maapallon gravitaatiokehyksissä. Referenssitaajuus $f_{(0,\infty)}$ kuvassa 16 tarkoittaa nyt kaukana auringosta, aurinkoon nähden levossa olevan kuvitteellisen kellon taajuutta. Maan ja satelliittien kellojen vuosivaihtelu on sama, joten vuodenaikaan liittyviä taajuuseroja ei kellojen välille synny. Esitetty sisäkkäisten gravitaatiokehysten ketjutus ei sellaisenaan kuulu suhteellisuusteorian formalismiin, mutta se antaa kokonaisvaltaisen ja havainnollisen kuvan kellotaajuuksiin vaikuttavista tekijöistä. Suhteellisuusteoria on lähtökohdiltaan paikallisteoria, jota yleensä sovelletaan yhdessä määritellyssä havaintokehyksessä.

Auringon vaikutusta GPS-järjestelmän kelloihin on kirjallisuudessa käsitelty varsin vähän. Ensisijainen päätelmä on, ettei auringon gravitaatio eikä maan orbitaaliliike auringon ympäri vaikuta GPS-järjestelmän kelloihin [5,6,9,10]. Päätelmä perustuu satelliittijärjestelmän tarkasteluun aurinkoa kiertävänä havaintokehyksenä, jonka aurinkoa lähempänä oleva reuna liikkuu aurinkoon nähden hitaammin kuin kauempana aurinkoa oleva reuna. Kuten yksinkertaisella laskulla voidaan osoittaa, tulisi auringon gravitaatiosta johtuva gravitaatiosiirtymä tällöin kumotuksi liikkeestä johtuvalla vastakkaismerkkisellä aikadilaatiosiirtymällä, jolloin nettovaikutus olisi nolla, kuva 18.

Kuvassa 16 esitetyn sisäkkäisten gravitaatiokehysten tarkastelu ja ECI-kehyksen ensisijaisuus relativististen korjausten soveltamisessa eivät tue päätelmää gravitaatiosiirtymää kumoavasta liiketermistä, sillä ECI-kehyksen koordinaatistosuunta on lukittu tähtiavaruuteen eikä aurinkoon, ts. auringosta katsottuna ECI-koordinaatisto pyörähtää vuoden aikana 360° maan orbitaaliliikettä vastaan, mikä kumoaa edellä päätellyn nopeuseron GPS-kehyksen aurinkoa lähempänä ja kauempana olevan reunan välillä, kuva 19. Tällöin auringon gravitaatiosiirtymä jää nettoefektiksi, mikä tarkoittaisi auringon hetkelliseen etäisyyteen verrannollista jaksollista häiriötä GPS-satelliitin kelloissa. Suurimmillaan tällainen häiriö olisi silloin, kun GPS-ratataso osoittaa kohti aurinkoa, jolloin kellohäiriön amplitudiksi tulee noin 12 ns, mikä on jokseenkin sama kuin 0.5 %:n eksentrisyyttä vastaavan jaksollisen häiriön amplitudi.



Kuva 18. Suhteellisuusteorian tulkinnan mukaan maan satelliittijärjestelmän nopeus auringon gravitaatiokehyksessä on suurimmillaan kun satelliitti on etäimmillään auringosta. Näin saadun nopeuden aiheuttama aikadilaatio kumoaa suuremmasta gravitaatiopotentiaalista johtuvan gravitaatiosiirtymän.



Kuva 19. Maan ECI-kehysten suunta on kiinnitetty tähtiavaruuteen, mikä eliminoi kehysten ”sisäkehän” ja ”ulkokehän” välisen nopeuseron, ja siis myös aikadilaatioeron auringon gravitaatiokehyksessä. Tällöin ECI-kehysten kelloihin syntyy auringon gravitaatiopotentiaaliin (auringon etäisyyteen) verrannollinen siirtymä, mikä havaitaan ECI-järjestelmässä kiertoliikkeessä olevissa kelloissa jaksollisena häiriönä.

The Effect of Solar Gravitational Potential on GPS Clocks

Tom Van Flandern & Thomas B. Bahder
 Army Research Laboratory
 PAWG, Colorado Springs
 1998 August 19
 (last two slides updated 2002 March 30)

Conclusions (last slide)

- Solar potential effect does not exist in GPS data; motion is “forced”
- Unexplained 12-hour periods correlated with Sun direction must have some other explanation
- No unresolved relativity issues remain at the 1-meter level for GPS

Source: <http://www.schriever.af.mil/GPS/PAWG/PAWG%201998/Papers/vanflandern.ppt>

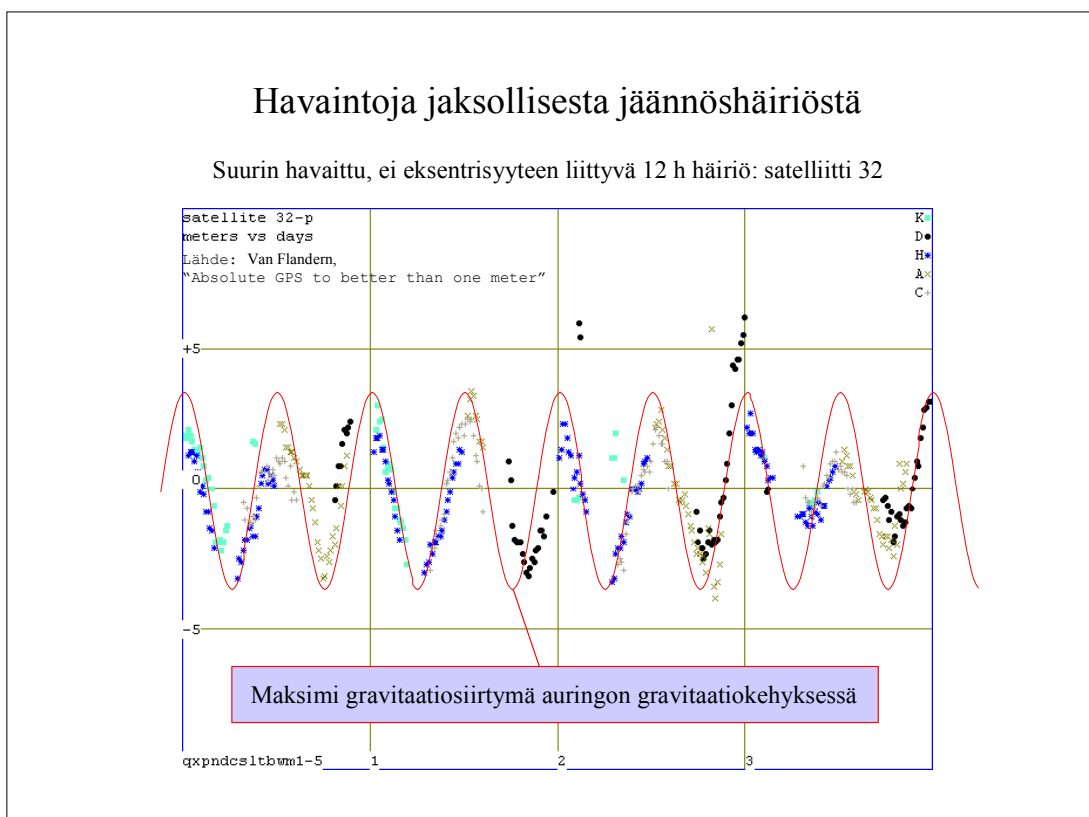
Kuva 20. GPS-kelloissa on voitu todeta auringon gravitaatiopotentiaaliin verrannollinen jaksollinen häiriö, jonka syytä ei ole identifioitu.

Auringon asemaan korreloituvista häiriöhavainnoista olen löytänyt vain yhden maininnan GPS-kirjallisuudessa, kuva 20 [11]. Havaittua auringon asemaan korreloituvaa jaksollista häiriötä pidetään selittämättömänä ilmiönä edellä esitettyyn suhteellisuusteorian tulkintaan perustuen. Tutkimuksen tekijä vahvistaa, että havaittu häiriö vastaa laskennallista auringon gravitaatiosiirtymän suuruutta [12]. Havainto puoltaa kuvissa 16 ja 19 esitettyjä ECI-kehysten ominaisuuksiin ja sisäkkäisten gravitaatio- ja liikekehysten formalismiin perustuvaa tulkintaa. Kuvassa 21 on sovitettu tältä pohjalta laskettu kuvan 19 mukainen maksimihäiriö van Flandernin GPS-sivuillaan julkaisemaan, suurimman auringon asemaan korreloituvan häiriön sisältämään GPS-dataan, josta satelliitin radan eksentrisyyteen liittyvä häiriö on poistettu.

Auringon gravitaation mahdollisella vaikutuksella satelliittikelloihin on teoreettisessa mielessä erittäin suuri merkitys kokonaisuuden tarkasteluun. Koska maa-asemien kellot käyttäytyvät gravitaatiopotentiaalın ja liikkeen suhteen ECI-kehyksessä samalla tavoin kuin satelliittikellot, merkitsisi se, että myös maa-asemien kelloissa olisi löydettävissä auringon gravitaatiopotentiaalista johtuva jaksollinen häiriö. Koska maapallon säde on huomattavasti pienempi kuin GPS-radın säde, muodostuu maapallon pyörimisestä johtuva auringon gravitaatiopotentiaalın heilahtelu maa-asemilla pienemmäksi kuin se muodostuu GPS-satelliiteilla. Vastaavasti kuitenkin kellovirheen integrointi aika maa-asemien kelloissa on kaksinkertainen GPS-satelliittikelloihin nähden, joten maksimissaan (päiväntasaajalla) maa-aseman kellon aurinkohäiriölle saadaan lauseke

$$\Delta t \approx 5.8 \text{ [ns]} \cdot \left[1 - 0.1 \cdot \sin\left(\frac{d_{(V.E.+)} }{365} 2\pi\right) \right] \cos\theta \cdot \sin\left(\frac{t}{24 \text{ h}} 2\pi\right) \quad (8)$$

missä vuorokausijakson lisäksi esiintyy ekliptikan kaltevuudesta johtuva vuosijakso sekä maa-aseman leveyspiiristä θ määräytyvä amplituditekijä.



Kuva 21. GPS-satelliittien tunnistamaton jaksollinen häiriö vastaa huomattavalla tarkkuudella ECI-kehysten ominaisuuksista pääteltyä auringon gravitaatiopotentiaalın vaikutusta.

5. Päätelmiä

GPS-järjestelmässä on vielä runsaasti käyttämättömiä mahdollisuuksia. Järjestelmän kokonaistarkkuus on saatu tasolle, joka mahdollistaa suhteellisessa paikannusmittauksissa millimetritason sekä horisontaali- että vertikaalisuunnassa. Absoluuttipaikannuksen ja signaalin sisältämän meteorologisen informaation täysimittaiseksi hyödyntämiseksi tulisi signaaliin sisältyvien erityisesti jaksollisten häiriöiden fysikaalinen alkuperä ja mallinnus saattaa nykyistä tarkemmalle tasolle. Esimerkiksi kuvan 21 jaksollinen jäännöshäiriö on amplitudiltaan reilut kolme metriä, mikä on yli kymmenkertainen meteorologian kannalta kiinnostavaan ilmakehän kosteuden aiheuttamaan signaaliviiveeseen verrattuna.

Tarkkuudeltaan ja havaintojärjestelmän kattavuudeltaan GPS-järjestelmä tarjoaa myös aivanlaatuisen mahdollisuuden fysiikan ja kosmologian teorioiden ja niiden soveltamisen testaamiseen.

Kirjallisuusviitteet

- [1] Hafele, J.C. and Keating, R.E., Around-the-World Atomic Clocks: Predicted Relativistic Time Gains, *Science* **177** (1972) 166
- [2] Hafele, J.C. and Keating, R.E., Around-the-World Atomic Clocks: Observed Relativistic Time Gains, *Science* **177** (1972) 168
- [3] Schlegel, R., Relativistic East–West Effect on Airborne Clocks, *Nature Phys. Sci.* **229** (1971) 237
- [4] Hafele, J.C., Reply to Schlegel, *Nature Phys. Sci.* **229** (1971) 238
- [5] Neil Ashby, Relativistic Effects in the Global Positioning System, Presented at the Fifteenth International Conference on General Relativity and Gravitation, Pune, India, December 15-21, 1997
- [6] Neil Ashby and David W. Allan, Practical Implications of Relativity for Global Coordinate Time Scale, *Radio Science*, 14, No.4 (1979) 649
- [7] Ashby, N., Relativity and the Global Positioning System, *Physics Today*, May 2002 (2002) 41
- [8] D.W. Allan, M.A. Weiss, N. Ashby, Around-the World Relativistic Sagnac Effect, *Science* **228** (1985) 69
- [9] Manasse, F.K., and Misner, C.W., Fermi normal coordinates and some basic concepts of differential geometry, *J.Mat.Phys.*, 4(6) (1963) 735-745
- [10] Bahder, T.B., Fermi Coordinates of an Observer Moving in a Circle in Minkowski Space: Apparent Behavior of Clocks, *General Relativity and Quantum Cosmology*, http://arxiv.org/PS_cache/gr-qc/pdf/9811/9811009.pdf
- [11] Van Flandern, T., Bahder, T.B., The Effect of Solar Gravitational Potential on GPS Clocks, PAWG, Colorado Springs, August 19 1998, <http://www.schriever.af.mil/GPS/PAWG/PAWG%201998/Papers/vanflandern.ppt>
- [12] Van Flandern, T. / Suntola, T., e-mail kirjeenvaihto, lokakuu 2002.